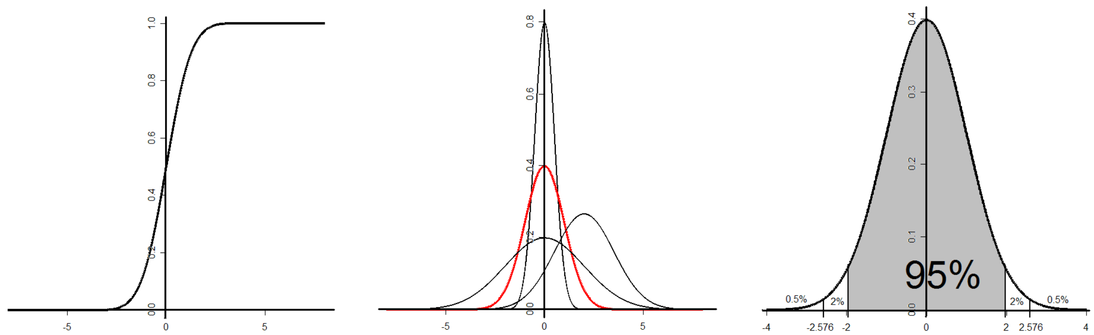
15. Нормальное распределение

15.1. Предварительные сведения

Случайная величина ξ имеет *нормальное распределение* $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$, если она обладает плотностью $p_\xi(x) = \varphi_{a,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\}$ и функцией распределения $F_\xi(x) = \Phi_{a,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}\}\, dy$.

Распределение $\mathcal{N}(0,1)$ называется *стандартным нормальным распределением*. Значения функции $\Phi(x) = \Phi_{0,1}(x)$ приведены в таблицах или могут быть рассчитаны на компьютере. Графики функции распределения $\Phi_{0,1}(x)$, плотностей нормально распределенных величин при различных значениях параметров a и σ^2 и плотность распределения $\mathcal{N}(0,1)$ приведены ниже на графиках.



Параметры нормального распределения — это математическое ожидание и дисперсия: если случайная величина $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, то $\mathbb{E}\xi = a$, $\operatorname{Var}\xi = \sigma^2$.

Нормальное распределение сохраняется при линейных преобразованиях. В частности, если $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, то $\eta = \frac{\xi - a}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$ — нормированная случайная величина.

Если $\xi_1 \sim \mathcal{N}(a_1, \sigma_1^2)$ и $\xi_2 \sim \mathcal{N}(a_2, \sigma_2^2)$ — независимые случайные величины, то $\xi_1 \pm \xi_2 \sim \mathcal{N}(a_1 \pm a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

15.2. Практическое занятие

1. Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$. Сравнить следующие вероятности:

а) $\mathbb{P}(|\xi| \le 0.7)$ и $\mathbb{P}(|\xi| > 0.7)$; б) $\mathbb{P}(-0.5 \le \xi \le -0.1)$ и $\mathbb{P}(1 \le \xi \le 2)$.

2. Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Найти $\mathbb{E}\xi^n$, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$.
Указание. После замены $y = x/\sigma$ использовать интегрирование по частям, взяв $u = y^{n-1}$, $dv = ye^{-y^2/2}\, dy$.
Ответ. $\mathbb{E}\xi^n = 0$ при нечетных n, $\mathbb{E}\xi^n = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (n-1)\sigma^n$ при четных n.
3. Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и имеют нормальные распределения $\mathcal{N}(1,1), \mathcal{N}(2,5), \mathcal{N}(0,7)$ соответственно. Найти

а) $\mathbb{P}(2\xi_1 - \xi_2 < 0)$, б) $\mathbb{P}(-3 < 2\xi_1 - \xi_2 < 5)$, в) $\mathbb{P}(1 < 2\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 < 4)$.

Ответ. а) 0.5; б) ≈ 0.7936; в) ≈ 0.2426.
4. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0,1)$. Пусть $\eta_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^2$. (Величины η_n имеют так называемые χ^2-распределения с n степенями свободы.) Найти плотности распределений случайных величин η_1 и η_2.

Указание. В первом случае использовать формулу для плотности функции от случайной величины, во втором случае применить формулу свертки.

Ответ. $p_{\eta_1}(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{2\pi x}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0; \end{cases}$ $p_{\eta_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\, e^{-x/2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ т.е. $\eta_2 \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{2})$.

5. Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, $\eta = e^{\xi}$, т.е. η имеет логарифмически нормальное распределение. Найти $\mathbb{E}\eta$ и $\operatorname{Var}\eta$.

Ответ. $\mathbb{E}\eta = e^{a+\sigma^2/2}$, $\operatorname{Var}\eta = e^{2a+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$.

15.3. Домашнее задание

6. Некоторая категория людей имеет средний вес 60 кг и среднее квадратическое отклонение веса 3 кг. Считая, что вес наудачу выбранного человека распределен по нормальному закону, найти вероятность того, что

а) он весит более 66 кг; б) его вес отличается от нормы не более чем на 5 кг.

Ответ. а) 0.02275; б) 0.9044.

7. С помощью формулы свертки проверить, что если ξ и η независимы и имеют распределение $\mathcal{N}(0, 1)$, то $\xi + \eta \sim \mathcal{N}(0, 2)$.

8. Случайные величины ξ и η независимы и имеют нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Найти $\mathbb{P}(|\xi - \eta| \leq 1)$.

Ответ. ≈ 0.52.

9. Случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение. Положим

$$\eta = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| \leq 1, \\ -\xi, & \text{если } |\xi| > 1. \end{cases}$$

Найти закон распределения η. Имеет ли $\xi + \eta$ нормальное распределение?